CONDITION DE SPÄTH ET THÉORÈMES DE RÉDUCTION.

MARC CABANES

Amiens, 18 Jan 2012

G un groupe fini, p un nombre premier, $\mathbb{F}$ un corps algebriquement clos.

Quelques notations : $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G)$ sont les classes d'iso de $\mathbb{F}G$-modules simples, $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G)_{p'}$ les χ de dimensions (notée $\chi(1)$) premieres à p. Si $H \trianglelefteq G$ et $\zeta \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}H)$, G_ζ le stabilisateur de la classe d'iso par autom induits par G sur H, $\mathrm{Irr}(G|\zeta)$ les classes des $\mathbb{F}G$-modules ayant ζ dans leur restriction à H. Clifford : $\mathrm{Irr}(G|\zeta) \sim \mathrm{Irr}(G_\zeta|H)$ qui à son tour si ζ projectif (en particulier si $\mathbb{F} = \mathbb{C}$) $\sim \mathrm{Irr}(\mathbb{F}G_\zeta e_\zeta)$ (voir [NgTs], [Nv]).

NB : $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G) = \coprod_{\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}\mathrm{Z}(G))} \mathrm{Irr}(\mathbb{F}G|\lambda)$.

Conjecture de McKay (1970) : *Soit L le normalisateur d'un p-Sylow de G (ou tout sous-groupe de G le contenant), alors*

$$|\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)_{p'}| = |\mathrm{Irr}(\mathbb{C}L)_{p'}|. \tag{MK}$$

Raffinement de Isaacs-Navarro ([IN] 2002) : *En notant pour tout entier $d \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z}$, $\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)_{d,p'} = \{\chi \mid \chi(1) \equiv \pm d \bmod p\}$, on a*

$$|\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)_{d,p'}| = |\mathrm{Irr}(\mathbb{C}L)_{d,p'}|. \tag{MK_d}$$

Conjecture d'Alperin ([Al] 1986) : *$\mathbb{F}$ la cloture algebrique de $\mathbb{F}_p$, si Q p-sous-groupe de G on note $\mathrm{Irr}_Q(\mathbb{F}\mathrm{N}_G(Q))$ les simples de $\mathrm{N}_G(Q)$ de dimension divisible par $|\mathrm{N}_G(Q)/Q|_p$, on définit*

$$\mathrm{Alp}(G) := \big(\coprod_Q \mathrm{Irr}_Q(\mathbb{F}\mathrm{N}_G(Q))\big)/G - \mathbf{conj}.$$

La conjecture d'Alperin (AWC) postule que ceci est en bijection avec $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G)$:

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Alp}(G). \tag{AW}$$

Formes equivariantes : on peut demander que • les bijections sont $\mathrm{Out}(G)$-equivariantes (ou $\mathrm{Aut}(G)_L$-equiv dans le cas McKay).

• préservation de $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}\mathrm{Z}(G))$.

• condition (COHO) sur les couples (γ, λ) , γ representation de G, λ representation d'un sous-groupe local (N ou $\mathrm{N}_G(Q)$) : voir plus loin.

Definition. On dit que G verifie la **condition de McKay inductive (iMK)** ssi il existe L tel que $\mathrm{N}_G(P) \subseteq L \subsetneq G$ $\mathrm{Aut}(G)_P$-stable et

$$\mathrm{Irr}(\mathbb{C}G)_{p'} \to \mathrm{Irr}(\mathbb{C}L)_{p'}$$

une bijection $\mathrm{Aut}(G)_L$-equivariante, preservant les ensembles $\mathrm{Irr}(-|\lambda)$ pour $\lambda \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}\mathrm{Z}(G))$ et telle que si $\chi \mapsto \psi$, le couple (χ, ψ) verifie (COHO) expliquee plus loin.

Possibilité de (iMK_d) et (iAW)

Theoremes de Isaacs-Malle-Navarro ([IMN] 2007) et de Navarro-Tiep ([NvTi] 2011). Si G est tel que toutes ses sections simples S sont telles que leur extension centrale universelle $\widehat{S}$ verifie (iMK), respectivement (iAW), alors G vérifie (MK), respectivement (AW).

Späth ([S2] 2011) : idem pour (MK_d)

1. Representations projectives.

$\mathcal{P}\colon G \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{F})$ telle que $\mathcal{P}(g)\mathcal{P}(g') \in \mathbb{F}^\times \mathcal{P}(gg')$ et $\mathcal{P}(1) = \mathrm{Id}_n$.

Cocycle $\alpha_{\mathcal{P}}\colon G \times G \to \mathbb{F}^\times$. $\alpha_{\mathcal{P}} \in Z^2(G, \mathbb{F}^\times)$.

Representations stables et cocycles : si $H \trianglelefteq G$, et $\mathcal{L}\colon H \to \mathrm{GL}_n$ est une representation irreductible **lineaire** (cocycle trivial), stable par G (les g-conjuguaisons envoient $\mathcal{L}$ sur une representation isomorphe pour tout $g \in G$) alors il existe une representation projective $\widehat{\mathcal{L}}\colon G \to \mathrm{GL}_n$ telle que $\widehat{\mathcal{L}}(gh) = \widehat{\mathcal{L}}(g)\mathcal{L}(h)$ et $\widehat{\mathcal{L}}(hg) = \dots$ pour tous $g \in G$, $h \in H$. Alors $\alpha_{\widehat{\mathcal{L}}}$ est un cocycle defini sur G/H.

De plus (Clifford) : $\mathrm{Irr}(\mathbb{F}G \mid \chi) \cong \mathrm{Irr}(\mathbb{F}_{\alpha_{\widehat{\mathcal{L}}}}[G/H])$ (voir [NgTs], [Nv])

2. Condition (coho) de Späth [S1].

Ici $X \supseteq L \supseteq Z = \mathrm{Z}(X)$ sont des groupes finis. Noter que $L/Z \subseteq X/Z \trianglelefteq \mathrm{Aut}(X)$. On prend $\chi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}X)$, $\psi \in \mathrm{Irr}(\mathbb{F}L)$.

Condition (Coho) Il y a des representations projectives $\mathcal{P}$ de $\mathrm{Aut}(X)_\chi$, $\mathcal{Q}$ de $\mathrm{Aut}(X)_{L,\psi}$ telles que (identifiant X/Z avec les automorphismes interieurs dans $\mathrm{Aut}(X)$)

(i) $\mathrm{Res}^{\mathrm{Aut}(X)_\chi}_{X/Z}\mathcal{P} = \mathcal{L} \circ \mathbf{s}$ où $\mathbf{s}\colon X/Z \to X$ est une section (normalisee) du quotient $X \to X/Z$, et $\mathcal{L}$ est une representation lineaire de $X \in \chi$,

(i') $\mathrm{Res}^{\mathrm{Aut}(X)_{L,\psi}}_{L/Z}\mathcal{Q} = \mathcal{M} \circ \mathbf{t}$ où $\mathbf{t}\colon L/Z \to L$ restriction de $\mathbf{s}$, et $\mathcal{M}$ est une representation lineaire de $L \in \psi$,

(ii) $\alpha_{\mathcal{P}}$ et $\alpha_{\mathcal{Q}}$ coincident sur $\mathrm{Aut}(X)_{L,\psi,\chi}$.

Quelques remarques :

- IMN et NT avaient une autre version de (COHO) comportant l'existence d'un groupe $X \trianglelefteq A$ tel que $A/X \cong \mathrm{Out}(X)_\chi$ ...
- si $X = [X, X]$, alors $\mathcal{P}$ satisfaisant (i) existe toujours (voir [C]).

• si $\mathrm{Out}(X)$ est cyclique, si χ, ψ au-dessus du meme caractere de Z et $\mathrm{Aut}(X)_{L,\chi} = \mathrm{Aut}(X)_{L,\psi}$ and $\mathrm{N}_X(L,\psi) = L$, la condi est realisee (voir [S3]).

• si ψ est une sous-representation "bien definie" de $\mathrm{Res}^X_L \chi$, (i) implique le reste.

3. Une equivalence de "triples".

Theoreme 1 $Z = \mathrm{Z}(X) \subseteq L \subseteq X \trianglelefteq G$ groupes finis, on suppose $\nu \in \mathrm{Irr}(\mathbb{C}Z)$, $\chi \in \mathrm{Irr}(X|\nu)$, $\psi \in \mathrm{Irr}(L|\nu)$.

Avec les hypotheses

(i) $X = [X,X]Z$ (donc $[X,X]$ est parfait de centre $Z \cap [X,X]$) et $Z \subseteq \mathrm{Z}(G)$.

(ii) $\mathrm{N}_X(L)_\psi = L$, $\mathrm{N}_G(L)_\chi = \mathrm{N}_G(L)_\psi$ et $G_\chi = X.\mathrm{N}_G(L)_\psi$ (donc $\mathrm{N}_G(L)_\psi/L \cong G_\chi/X$ par le morphisme naturel).

(iii) $\mathrm{Res}^X_{[X,X]}\chi$ et $\mathrm{Res}^L_{L\cap[X,X]}\psi$ satisfont (Coho) pour $([X,X], L \cap [X,X], Z \cap [X,X])$.

Alors les "modular character triples" (G_χ, X, χ) et $(\mathrm{N}_G(L)_\psi, L, \psi)$ sont isomorphes au sens de [Nv] 8.25. En particulier

$$\mathrm{Irr}(G|\chi) \cong \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(L)|\psi)$$

par une bijection qui conserve la p-valuation des degrés.

Oral : << Preuve de IMN : 40 pages de calculs sur les cocycles..

Preuve (Späth) : On peut supposer $G = G_\chi$ et $\mathrm{N}_G(L)_\psi = \mathrm{N}_G(L)$. La condition (Coho) nous fournit des representations projectives $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$ de $G/\mathrm{C}_G(X)$ et $\mathrm{N}_G(L)/\mathrm{C}_G(X)$ tells que $\mathrm{Res}_{X/Z}\mathcal{P} = \mathcal{L} \circ \mathbf{r}_{|X/Z}$ et $\mathrm{Res}_{L/Z}\mathcal{Q} = \mathcal{L} \circ \mathbf{r}_{|L/Z}$ où $\mathcal{L}$, $\mathcal{M}$ lineaires fournissant χ et ψ et $\mathbf{r}\colon G/\mathrm{C}_G(X) \to G$ une section ensembliste... et $\alpha_{\mathcal{P}}$ coincide avec $\alpha_{\mathcal{Q}}$ sur $\mathrm{N}_G(L)/\mathrm{C}_G(X)$.

Par un procede original on fabrique d'abord des representations projectives $\mathcal{P}_\chi$ et $\mathcal{Q}_\psi$ de G et $\mathrm{N}_G(L)$ telles que $\mathcal{P}_\chi({}^t x) = {}^{\mathcal{P}_\chi(t)}\mathcal{P}(x)$ pour tous $x \in G$, $t \in \mathrm{N}_G(L)$, etc ... puis $\mathcal{R}$ sur G etendant $\mathcal{L}$ avec $\mathcal{R}(xt) = \mathcal{R}(x)\mathcal{L}(t)$ ... ce qui permet de comparer les cocycles associés à χ G-stable et ψ $\mathrm{N}_G(L)$-stable, qui sont des cocycles sur $G/X \cong \mathrm{N}_G(L)/L$ qui s'averent egaux par la relation initiale entre les cocycles de $\mathcal{P}$ et $\mathcal{Q}$.. d'où l'égalité de triples..>>

(...)

4. Preuve du Theoreme d'Isaacs-Malle-Navarro.

Induction et formes relatives :

(rMK) $Z \trianglelefteq G$ des groupes finis et $Z \subseteq P \subseteq G$ avec P/Z p-Sylow de G, alors

$$\mathrm{Irr}(G|\zeta)_{p'} \cong \mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(P)|\zeta)_{p'}$$

pour tout $\zeta \in \mathrm{Irr}(Z)$.

On va montrer ([IMN] Th B)

Theorem 2. *Si toutes les sections simples de G/Z vérifient $(\widehat{\mathrm{iMK}})$, alors (rMK) ci-dessus est vrai.*

Preuve par récurrence sur $|G/Z|$. On peut supposer (Clifford) $G_\zeta = G$. Réduction de Fong : on suppose Z central.

Soit X/Z un chief factor i.e. sous-groupe normal minimal (donc caracteristiquement simple) de G/Z.

1er cas : X/Z non abelien S^n avec S simple **non abelien.**

On lui applique le Theoreme 1 ci-dessus car la condition (Coho) se transfere bien de $\widehat{S}$ à $\widehat{S}^n$ puis à $[X,X]$.

2eme cas . (Preuve de [IMN])

On suppose maintenant X/Z quelconque (possiblement abelien).

On montre

Lemme. *[IMN] Pour tout* $\mathrm{N}_G(XP) \subseteq H \subseteq G$ *on a*

$$\mathrm{Irr}(H|\zeta)_{p'} = \coprod_{\psi\in\Psi} \mathrm{Irr}(H|\psi),$$

pour $\Psi := \mathrm{Irr}(X|\zeta)_{p'}^{XP}/\mathrm{N}_G(XP) - \mathbf{conj}$.

Preuve : regarder $\mathrm{Res}^H_X \chi = **\sum_{h\in H/H_{\chi_0}} {}^h\chi_0$ ce qui implique $\chi_0 \in \mathrm{Irr}(X)_{p'}$ et $H/H_{\chi_0} = p'$ et donc XP a un point fixe sur cette somme... etc...

∎

Maintenant le lemme implique

$$\begin{aligned} |\mathrm{Irr}(G|\zeta)_{p'}| &= \sum_{\psi\in\Psi} |\mathrm{Irr}(G|\psi)_{p'}| \quad \text{cas } H=G, \\ &= \sum_{\psi\in\Psi} |\mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(XP)|\psi)_{p'}| \quad \text{(rMK) pour } X \trianglelefteq G \text{ et recurrence}, \\ &= |\mathrm{Irr}(\mathrm{N}_G(P)|\zeta)_{p'}| \quad \text{(rMK) pour } Z \trianglelefteq \mathrm{N}_G(XP) \text{ et recurrence} \end{aligned}$$

lorsque $\mathrm{N}_G(XP) \subsetneq G$. Ce qui prouve (rMK) dans ce cas.

Si $\mathrm{N}_G(XP) = G$, c'est-à-dire $XP \trianglelefteq G$, on a $Z \subseteq X \subseteq XP \subseteq G$ tous normaux dans G. Mais alors si X/Z est abélien, on voit que G est p-résoluble.

Dans ce cas un théorème de Okuyama-Wajima ([OW] 1980) s'applique (utilisation de la corresp de Glauberman).

CONCLUSION.

• (MK_d) : les bijections ci-dessus préservent les ratios de degrés et $G/L = 1$ mod p pour tout L contenant un norm de p-Sylow...

References.

[Al] J.L. Alperin, Weights for finite groups, *in Proc. Symp. pure Math.,* **47** I (1987), 369-379 .

[C] M. Cabanes, "Two remarks on the reduction of Alperin's weight conjecture." (Aug 2011) `http://people.math.jussieu.fr/~cabanes/ProjAlpW8.pdf`

[IN] M. Isaacs, and G. Navarro, New refinements of the McKay conjecture for arbitrary finite groups, *Ann. of Math., (2)* **156** (2002), 333–344.

[IMN] M. Isaacs, G. Malle, and G. Navarro, A reduction theorem for the McKay conjecture, *Invent. Math.,* **170** (2007), 33–101.

[NgTs] H. Nagao and Y. Tsushima, *Representations of Finite Groups,* Academic, 1989.

[Nv] G. Navarro, Characters and Blocks of Finite Groups, Cambridge, 1998.

[NvTi] G. Navarro, P.H. Tiep, A reduction theorem for the Alperin weight conjecture, *Invent. Math.,* **170** (2010), 33–101.

[OW] T. Okuyama and M. Wajima, Character correspondence and p-blocks of p-solvable groups, *Osaka J. Math.* **17** (1980), 801–806.

[S1] B. Späth, Inductive McKay condition in defining characteristic, *Bull. London Math. Soc. to appear,* (2011) doi: 10.1112/blms/bdr100 .

[S2] B. Späth, A reduction theorem for the Alperin-McKay conjecture, *to appear.* `http://www.math.rwth-aachen.de/~Britta.Spaeth/RedThmAM.pdf`

[S3] B. Späth, The inductive McKay Condition in the maximally split case, Preprint, 2010.

QUESTIONS.

Q : Cas de la conjecture d'Alperin ? R : (AW) la seconde partie est plus difficile : difficile de ramener le cas X/Z abélien au cas G p-résoluble (qui est connu, Okuyama encore 1981). Utilisation de la correspondance de Glauberman généralisée (Dade 1980) .

Q : Cas vérifiés pour (iMK) ? R : l'équivariance n'est pas facile pour les groupes de type de Lie. Mais quelques résultats : Brunat, Späth, C-Späth.

Q : Défaut abélien ? Ne simplifie pas vraiment les vérifications : question de l'équivariance, toujours.